15

1 a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ k & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & -2k & 2-6k & 1-2k \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & (2-6k)+4k^2 & 1-2k \end{array}\right)$

Een unieke oplossing als $2-6k+4k^2 \neq 0 \Rightarrow$ ~~$k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2} \neq 0$~~ $4k^2-6k+2 \neq 0$

$(2k-2)(2k-1) \neq 0$

$k \neq 1$ en $k \neq \frac{1}{2}$

b Het is strijdig als $4k^2-6k+2=0$ én $1-2k \neq 0$. De eerste voorwaarde wordt voldaan als $k=1$ of $k=\frac{1}{2}$, van die twee voldoet alleen $k=1$ aan de tweede voorwaarde. Dus het stelsel is strijdig als $k=1$.

c Er zijn oneindig veel oplossingen als $4k^2-6k+2=0$ én $1-2k=0$. $k=1$ en $k=\frac{1}{2}$ voldoen aan de eerste voorwaarde, alleen $k=\frac{1}{2}$ voldoet daarvan aan beide, dus er zijn oneindig veel oplossingen als $k=\frac{1}{2}$

2 a I: $N(A)$ is niet ϕ ; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (vector met m nullen) is een oplossing van $Ax = 0$,
dus $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A) \Rightarrow N(A)$ is niet ϕ.

II: $n_1, n_2 \in N(A)$; dan $(n_1 + n_2) \in N(A)$: $An_1 = 0$, $A \cdot n_2 = 0$ (dat zijn gegevens, want n_1 en n_2 zitten in $N(A)$). Dan $A(n_1 + n_2) = A(n_1) + A(n_2) = 0 + 0 = 0$, dus $(n_1 + n_2) \in N(A)$

III: als $n \in N(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; dan $(\alpha n) \in N(A)$: $A(\alpha n) = A\alpha n = An\alpha = 0 \cdot \alpha = 0$ dus $(\alpha n) \in N(A)$.

3

b $K \neq \phi \Rightarrow b \in R(A)$:
$K \neq \phi$, dus er is minstens 1 b die voldoet aan $Ax = b$.
$Ax = b$ is ook uit te schrijven als $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \ldots + a_n \cdot x_n = b$ met $a_1, a_2 \ldots a_n$ de kolommen van A. b is dus een lineaire combinatie van de kolommen van A, dus b zit in span (kolommen (A))
dus b ~~zit in~~ $\in R(A)$

4

$b \in R(A) \Rightarrow K \neq \phi$
$b \in R(A)$, dus b is te schrijven als lineaire combinatie van de kolommen van A, dus als $a_1, a_2 \ldots a_n$ de kolommen van A zijn dan $a_1 x_1 + a_2 x_2 \ldots + a_n x_n = b$ voor een combinatie van $x_1, x_2 \ldots x_n$. Dus $Ax = b$ als x de kolomvector met $x_1, x_2 \ldots x_n$ is. Dus er is een $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ die oplossing is van $Ax = b$
dus $K \neq \phi$

c I: elke $(v+w) \in K$

$A \cdot v = b$, $A \cdot w = 0$ (want $v \in K$ en $w \in N(A)$)

$A \cdot (v+w) = A \cdot v + A \cdot w = b + 0 = b$, dus $(v+w)$ is een oplossing van $Ax = b$, dus elke $(v+w) \in K$

II: als $l \neq v+w$, dan $l \notin K$.

Stel dat er wel een $l \neq v+w$ bestaat waarvoor geldt $l \in K$.

Dus $Al = b$ Dan $0 = b - b = Al - A(v+w)$ dus ...

3

d K is geen deelruimte van $\mathbb{R}^n$, want stel x_1, x_2 oplossingen van $Ax = b$. Dan $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = b + b = 2b \neq b$, dus $(x_1 + x_2) \notin K$, dus K is niet gesloten onder optelling, dus K is geen deelruimte van $\mathbb{R}^n$. wanneer wel?

2

3a Stel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: voor een lineaire afbeelding T geldt dan

5 $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$.

$$T(\alpha A + \beta B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(\alpha A + \beta B) - (\alpha A + \beta B)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha A + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\beta B - \alpha A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \beta B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A - \alpha A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B - \beta B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A - A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B - B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \alpha T(A) + \beta T(B)$$

dus T is een lineaire afbeelding.

b Dus alle M waarvoor $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M - M\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. als $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0,\ d - a = 0 \Rightarrow a = d$$

Dus ker (T) bestaat uit alle M die voldoen aan $M = \cancel{\begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}}$ met $p, q \in \mathbb{R}$.

c Een basis voor ker (T) is $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, want elke $M = \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ kan dan worden geschreven

5 als $p \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & p \end{pmatrix} = M$.

15

4 a Stel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $A, B \in P_3$: voor een lineaire afbeelding T moet dan gelden

3 $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$.

$$T(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)' + (\alpha A + \beta B)'' = (\alpha A)' + (\beta B)' + (\alpha A)'' + (\beta B)''$$
$$= \alpha A' + \beta B' + \alpha A'' + \beta B''$$
$$= \alpha A' + \alpha A'' + \beta B' + \beta B''$$
$$= \alpha(A' + A'') + \beta(B' + B'')$$
$$= \alpha T(A) + \beta T(B)$$

dus T is een lineaire afbeelding.

b ~~Dus~~ Dus alle p waarvoor $p' + p'' = 0$

4

$p' = -p''$

De afgeleide van een polynoom is altijd een graad lager dan de polynoom, tenzij beide ~~...~~ zijn de nulpolynoom zijn.
Ook zijn 2 polynomen slechts gelijk als ze dezelfde graad en dezelfde coëfficiënten hebben, dus
$p' = -p''$ kan alleen gelden als
$p' = -p'' = 0$, als $p' = 0$, dan $-p'' = 0$, dus de kern bestaat uit alle p waarvoor $p' = 0$.
$p' = 0$ als $p = \alpha x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 x^2$ met $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dus $\ker(T) = \{\alpha + 0 \cdot x + 0x^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

4 c Stel $p = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ (~~dit~~ met $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (~~dit zijn dan~~ alle polynomen in P_3 zijn zo te schrijven). Dan $T(p) = \cancel{\beta + 2\gamma x}$ $p' + p'' = \beta + 2\gamma x + 2\gamma = \beta + 2\gamma(1+x) = \beta(1) + \gamma(2+2x)$
β en γ mochten alle waarden nemen in $\mathbb{R}$. Definieer $\frac{1}{2}a = \gamma$ en $b = \beta + a$, dan
range $T(P_3) = \beta(1) + \gamma(2+2x) + 0 \cdot x^2 = \beta + \frac{1}{2}a(2+2x) + 0 \cdot x^2 = b - a + a + ax + 0 \cdot x^2$
$= b + ax + 0 \cdot x^2$ met $b, a \in \mathbb{R}$

4 d $T(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$
$T(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0x^2$ $\Rightarrow [T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$T(x^2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0x^2$

5 a

$A^TA\hat{x} = A^Tb \implies$

$0 = A^Tb - A^TA\hat{x} \implies$

$0 = A^T(b - A\hat{x}) \implies A^T(b - A\hat{x}) = 0 \implies$ noem $N(A^T)$ de nulruimte van A^T, dan $(b - A\hat{x}) \in N(A^T)$.

Voor elke $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $N(B) = R(B^T)^\perp$. Definieer nu $B = A^T$ dan $N(A^T) = R(A^{T^T})^\perp = R(A)^\perp$

5 Dus elk element uit $N(A^T)$ staat loodrecht op de kolomruimte van A, dus $b - A\hat{x}$ staat loodrecht op $R(A)$.

b ~~$N(A) = \{0\}$, ... dus de kolommen van A spannen~~

$N(A) = \{0\} = R(A^T)^\perp \implies R(A^T) = \mathbb{R}^n$, want elke vector staat loodrecht op $\underline{0}$.

~~$R(A) = \mathbb{R}^m$, want $Ax = 0$ heeft alleen oplossing $x = 0$ (want $N(A) = \{0\}$)~~

~~De kolommen van A^TA kunnen worden beschouwd als lineaire combinatie van de kolommen van A^T:~~
~~noem $A^T = B$, $b_{ij} = a_{ji}$, dan $C = A^TA = B \cdot A$ dan $\bar{c}_j = \sum_{i=1} b_i a_{ij}$~~
~~C is niet singulier als $C \cdot x = 0$ alleen de triviale oplossing heeft.~~
~~$R(A^T) = \mathbb{R}^n$ ...~~
~~nullity (A^T) + rank $(A^T) = m$, rank $(A^T) = \dim(\text{kolomruimte}(A^T)) = n$~~

3 De kolommen van A^TA kunnen worden beschouwd als lineaire combi van kolommen van A^T: noem $A^T = B = b_{ij}$, $C = A^TA = B \cdot A$, dan $\bar{c}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i a_{ij}$. ~~De kolommen van C zijn lineair onafhankelijk~~ $C \cdot x = 0 \iff \bar{c}_j \cdot x_j = 0$. Dit kan alleen als $x_j = 0$, dus de vergelijking $x_1c_1 + x_2c_2 \ldots +$

Dus de kolommen van $C = A^TA$ zijn lineair onafhankelijk en dus is A^TA niet singulier:

als de kolommen van een vierkante matrix onafhankelijk zijn, is de matrix niet-singulier, en A^TA is vierkant.

c $A^TAx = A^Tb \implies x = (A^TA)^{-1} \cdot A^Tb$

$p = A \cdot x = A(A^TA)^{-1} \cdot A^Tb$

4

${}_n c_n = 0$ heeft alleen de triviale oplossing.

13

6 a $(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$ karakteristiek polynoom: ~~$-\lambda^3 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 - \lambda - 0 \cdot 1 \cdot -\lambda - 0 \cdot 0 \cdot 0$~~

3

~~$= -\lambda^3 + 4\lambda$~~

ontwikkelen naar eerste rij:

$-\lambda \cdot ((-1)^{1+1} \cdot (-\lambda \cdot -\lambda - 1 \cdot 4)) + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots$

$= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 4)$

b dan $-\lambda \cdot (\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, $\lambda = 2$ of $\lambda = -2$

4

c $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -4x_3$, $x_2 = 0$ $\Rightarrow$ de eigenvectoren zijn van de vorm $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x}_1$

2

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 4x_3$

$x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3$

$\Rightarrow$ de eigenvectoren hebben de vorm $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 = -4x_3$

$x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3$

$\Rightarrow$ de eigenvectoren hebben de vorm $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d A heeft 3 verschillende eigen~~vectoren~~waarden, in de zin van: geen enkele heeft dezelfde grootte,

4

dus diagonalisering is mogelijk. Bijvoorbeeld: $T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dan: T^{-1} vinden: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

en dat is een diagonaal dus deze T voldoet: $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$